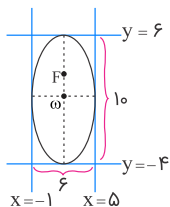


گزینه ۱

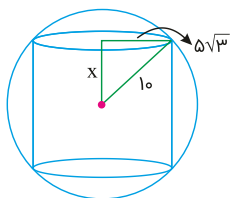


$$\left. \begin{array}{l} ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \end{array} \right\} \Rightarrow c = ۴$$

پس:

$$F(۲, ۵) \text{ , } \omega(۲, ۱)$$

گزینه ۳



$$x^۲ = ۱۰^۲ - (۵\sqrt{۳})^۲ = ۱۰۰ - ۷۵ = ۲۵ \Rightarrow x = ۵$$

ارتفاع استوانه: $۲x = ۱۰$

گزینه ۲

$$BC = \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = ۶ \text{ : طبق قانون فیثاغورس}$$

در اثر دوران شکل حول محور AC، مخروطی خواهیم داشت که یک حفرهٔ استوانه‌ای (به دلیل دوران مربع) دارد، پس حجم حاصل از دوران قسمت رنگی برابر است با:

$$V_{\text{قسمت رنگی}} = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{استوانه}} = \frac{1}{۳}\pi(۶)^۲(۸) - \pi(۲)^۲(۲) = ۹۶\pi - ۸\pi = ۸۸\pi$$

معادله دایره را استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -6 + 1 + 9$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = (1, -3) \\ R_1 = 2 \end{cases}$$

طول خط‌المركزین را حساب می‌کنیم:

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

برای آنکه دو دایره مماس خارج باشند، باید:

$$OO' = R_1 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$

معادله دایره دوم را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{matrix} O' = (-2, 1) \\ R_2 = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

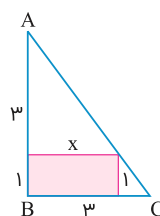
$y = 1$ را در معادله دایره قرار می‌دهیم:

$$(x+2)^2 + 0 = 9 \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \Rightarrow x+2 = \pm 3 \Rightarrow x = 1, -5$$

$$\begin{cases} a - c = 4 \\ a + c = 8 \end{cases} \Rightarrow (a-c)(a+c) = 32$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 32 \Rightarrow b = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 8\sqrt{2}$$

برای به دست آوردن طول مستطیل از قضیه تالس استفاده می‌کنیم:



$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

با دوران شکل حاصل حول پاره‌خط AB، یک مخروط به دست می‌آید که از درون آن یک استوانه خارج شده است. پس حجم استوانه را از حجم مخروط کم می‌کنیم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi (3)^2 (4) = 12\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{9}{4}\right)^2 (1) = \frac{81}{16}\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم شکل حاصل} = 12\pi - \frac{81}{16}\pi = \frac{192 - 81}{16}\pi = \frac{111\pi}{16}$$

$$C_1: x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow O_1(-2, 0), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow O_2(1, -2), R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4a}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4a} = \frac{1}{2}\sqrt{4(4 - a)} = \sqrt{4 - a}$$

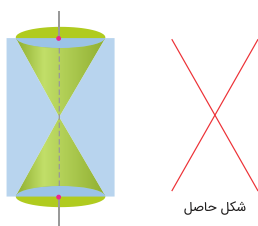
$$O_1O_2 = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+2)^2} = 5$$

دو دایره مماس برون‌اند، پس داریم:

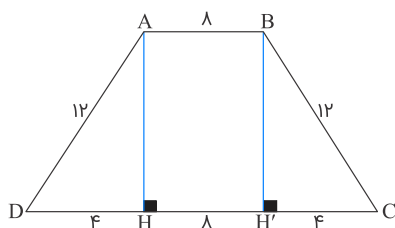
$$O_1O_2 = R_1 + R_2$$

$$5 = 2 + \sqrt{4 - a} \Rightarrow 9 = 4 - a \Rightarrow a = -5$$

همان‌طور که مشخص است، مقطع حاصل دو خط متقاطع است. واضح است که این دو خط بر هم عمود نیستند.



سطح مقطع حاصل از این برش عمودی، یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است. اگر این ذوزنقه را $ABCD$ بنامیم، با رسم ارتفاع‌های AH و BH' خواهیم داشت:



$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 144 - 16 = 128$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}AH(AB + DC) = \frac{1}{2}(8\sqrt{2})(8 + 16) = 96\sqrt{2}$$

مجموع فاصله‌ها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت باشد، تعریف بیضی است. ($2a = 5$) طول قطر بزرگ بیضی را نشان می‌دهد) بنابراین نقاط $(-1, 1)$ و $(-1, -3)$ کانون‌های بیضی هستند.

$$\frac{F(-1, 1)}{F'(-1, -3)} \Rightarrow O\left(\frac{-1 + (-1)}{2}, \frac{1 + (-3)}{2}\right) = (-1, -1) \text{ مرکز بیضی}$$

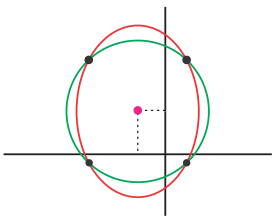
$$FF' = 2c = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (1 - (-3))^2} = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{5}{2} \\ c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2} = 1.5$$

ازطرفی در دایره $2(x+1)^2 + 2(y+1)^2 = 7$ مرکز و شعاع را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\div 2} (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} O' = (-1, -1) \text{ مرکز} \\ R = \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ شعاع} \end{cases}$$

مرکز بیضی و دایره بر هم منطبق است. حال با رسم تقریبی می‌توانیم تعداد نقاط را مشخص کنیم:



باتوجه به شکل می‌بینیم که ۴ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

MF' نصف وتر کانونی است.

$$S_1 = S(\triangle FF'M) = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{b^2}{a} = \frac{cb^2}{a} = eb^2$$

$$S_2 = S(\triangle B'FF') = \frac{1}{2} \times 2c \times b = cb$$

$$S_1 + S_2 = cb + eb^2 = b(c + eb)$$

در این سؤال قرار است مساحت ذوزنقه $PMNF'$ را به دست بیاوریم. ارتفاعش که $|PM|$ و برابر با $|FF'|$ است، پس ارتفاعش برابر $۲c$ می‌شود. دو قاعده هم $|PF'|$ و $|MN|$ است. پس قاعده‌ها وتر کانونی و نصف وتر کانونی است. پس:

$$S_{PMNF'} = \frac{1}{2}(|PF'| + |MN|)|FF'| = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a} + \frac{2b^2}{a} \right) 2c = \frac{3b^2c}{a}$$

$$a^2 = 36, b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ c = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

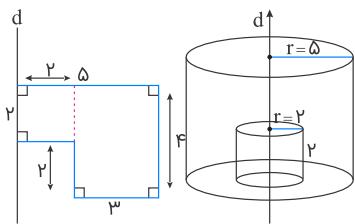
$$\Rightarrow S_{PMNF'} = \frac{3b^2c}{a} = \frac{3 \times 4 \times 4\sqrt{2}}{6} = 8\sqrt{2}$$

وقتی دایره در ناحیه سوم بر محورهای مختصات مماس است یعنی مرکز آن $O(-\alpha, -\alpha)$ و شعاع آن نیز $r = \alpha$ است. ازطرفی فاصله مرکز دایره تا خط $8x + 15y + 6 = 0$ باید برابر شعاع باشد.

$$\alpha = \frac{|\lambda(-\alpha) + 15(-\alpha) + 6|}{\sqrt{\lambda^2 + 15^2}} = \frac{|-23\alpha + 6|}{17} = \alpha$$

$$|-23\alpha + 6| = 17\alpha \Rightarrow \begin{cases} -23\alpha + 6 = 17\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6}{40} = 3/20 \\ -23\alpha + 6 = -17\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

حجم جسم حاصل برابر تفاضل دو استوانه به وجود آمده است.

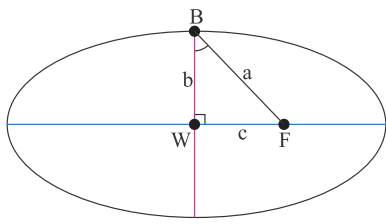


$$\text{استوانه } V = h\pi(r)^2$$

$$\text{استوانه بزرگتر } V = 4\pi(5)^2$$

$$\text{استوانه کوچکتر } V = 4\pi(2)^2$$

$$V_{\text{جسم}} = 4\pi(25) - 4\pi(4) = 4\pi(25 - 4) = 92\pi$$

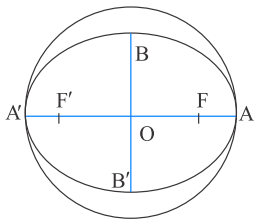


$$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

$$\sin(\angle FBW) = \frac{c}{a} = e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\angle FBW) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle FBW = 60^\circ \Rightarrow \angle FBF' = 2 \times 60 = 120^\circ$$

چون دایره در نقاط A و A' بر بیضی مماس است، پس قطر بزرگ بیضی برابر قطر دایره است. یعنی داریم:



$$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 57 = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4(c)} = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 196 - 228}$$

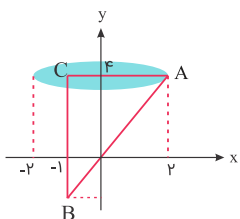
$$= \frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{قطر دایره} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر بزرگ بیضی} = 2a = 4\sqrt{2}$$

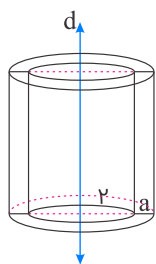
همچنین می‌دانیم مجموع فواصل نقطه دلخواه M روی بیضی از دو کانون بیضی برابر 2a است. بنابراین داریم:

$$MF + MF' = 2a = 4\sqrt{2}$$

بزرگ‌ترین سطح مقطع دایره‌ای شکل را دورترین نقطه مولد از محور به وجود می‌آورد. در این مسئله دورترین نقطه، A(2, 4) است که فاصله‌اش از محور yها برابر ۲ است. در نتیجه مساحت دایره مورد نظر $\pi(2)^2 = 4\pi$ است.



جسم حاصل از دوران مستطیل حول خط d ، فضای بین دو استوانه با شعاع‌های قاعده ۲ و $a + ۲$ و ارتفاع ۶ می‌باشد، پس داریم:

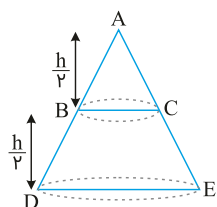


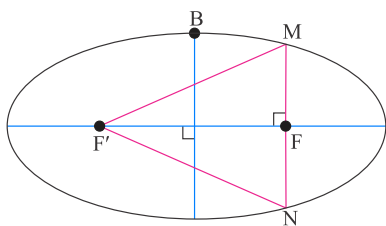
$$\begin{aligned}
 V &= \pi(2+a)^2(6) - \pi(2)^2(6) = 6\pi(4 + 4a + a^2) - 6\pi(4) \\
 &= 6\pi(a^2 + 4a) = 30\pi \Rightarrow a^2 + 4a - 5 = 0 \Rightarrow (a+5)(a-1) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ a = 1 \Rightarrow \text{ق.ق} \end{cases} \\
 S_{\text{مستطیل}} &= 6a = 6 \times 1 = 6
 \end{aligned}$$

مثلث ABC با مثلث ADE متشابه است و نسبت تشابه $\frac{1}{۲}$ می‌باشد، پس نسبت مساحت آن‌ها $\frac{1}{۴} = \left(\frac{1}{۲}\right)^2$ و نسبت حجم این دو مخروط $\frac{1}{۸} = \left(\frac{1}{۲}\right)^3$ است. بنابراین داریم:

$$V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{۸} V_{\text{مخروط اولیه}}$$

$$V_{\text{مخروط کوچک}} = ۷V_{\text{مخروط کوچک}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = ۸V_{\text{مخروط کوچک}} = V_{\text{قسمت بزرگ‌تر ایجادشده}}$$





$$|MN| = \frac{2b^2}{a}, \quad 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$S(\triangle F'MN) = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{2b^2}{a} = \frac{c}{a} \times 2b^2 = e \times 2b^2$$

$$S(\triangle F'MN) = \frac{1}{2} \times 2(1)^2 = \frac{2}{2}$$